Bewegung eines schweren Punctes
auf
einigen Rotationsoberflächen.

INAUGURAL-DISSERTATION,

der philosophischen Facultät zu Jena

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

von

FRANZ FERDINAND RIETZSCH,

in Dresden.



Jena 1869.

Druck von W. Ratz.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. Voigt,

erstem Mathematikus am Gymnasium zu Zwickau,

in dankbarer Erinnerung

gewidmet

vom Verfasser.

Bewegung eines schweren Punctes ohne Reibung auf einigen Rotationsoberflächen, deren Achsen mit der Richtung der Schwere zusammenfallen.

§. 1.

Die allgemeine Gleichung einer Rotationsoberfläche ist, wenn die Rotationsachse zur z-Achse genommen wird,

$$r^2 = x^2 + y^2 = f(z),$$

und diese Fläche wird erzeugt durch Rotation der Curve

$$r^2 = f(z)$$

um die z-Achse.

Da der Punct nur durch die Schwerkraft bewegt wird, so ist seine Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ zur Zeit t bestimmt durch

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = C - 2gz,$$

wo C eine Constante ist, g die Schwerkraft bedeutet und die positive z-Achse der Schwere entgegengesetzt gerichtet ist.

Habe die Bewegung in der Höhe $z = z_0$ mit der Geschwindigkeit $v = v_0$ begonnen, so ist auch

$$v_0^2 = C - 2gz_0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$(1) \qquad v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v_0^2 - 2g(z - z_0).$$

Der Widerstand der Fläche wirkt in deren Normale, welche die Rotationsachse trifft. Die Schwerkraft ist parallel zur Rotationsachse; also trifft die Resultante aus der Schwerkraft und dem Widerstande der Fläche, d. i. die Kraft, die den freien

Punct bewegt, die Rotationsachse, und es gilt daher für die Ebene der x, y der Flächensatz, d. h. es ist

(2) $$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \text{const.}$$

Für die Polarcoordinaten

$$\begin{array}{c} x = r \,.\, \cos\varphi\,, \\ y = r \,.\, \sin\varphi\,, \\ \hline x^2 + y^2 = r^2, \end{array}$$

$$dx = -\, r \sin\varphi \, d\varphi + \cos\varphi \, dr,$$

$$dy = \quad r \cos\varphi \, d\varphi + \sin\varphi \, dr$$

folgt aus den Gleichungen (1) und (2)

$$\frac{r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2}{dt^2} = v_0^2 - 2g(z - z_0), \qquad (3)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const.}$$

$r \frac{d\varphi}{dt}$ ist die Componente der Geschwindigkeit nach der Tangente an den Rotationskreis der Stelle, an welcher sich der schwere Punct zur Zeit t befindet. Sei diese im Anfange $r = r_0$ der Bewegung w_0, also

$$r_0 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = w_0, \text{ so ist}$$

$$r_0^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = r_0 \, w_0 = \text{const. und}$$

$$\left.\begin{array}{l} r^2 \dfrac{d\varphi}{dt} = r_0 \, w_0 \\ dt = \dfrac{r^2}{r_0 \, w_0} \, d\varphi = \dfrac{fz}{w_0 \sqrt{fz_0}} \, d\varphi. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Aus der Gleichung der Rotationsfläche folgt

$$2r\,dr = \frac{dfz}{dz} \, dz = f'z \, dz\,,$$

$$dr^2 = \frac{(f'z)^2}{4r^2} dz^2 = \frac{(f'z)^2}{4fz} \, dz^2,$$

und es geht hiermit (3) über in

$$4(fz)^2 d\varphi^2 + \{4fz + (f'z)^2\} dz^2 = 4fz \{v_0^2 - 2g(z-z_0)\} dt^2$$

und wenn der Werth für dt aus (4) substituirt wird

$$4r_0^2w_0^2(fz)^2 d\varphi^2 + r_0^2w_0^2\{4fz+(f'z)^2\} dz^2 = 4(fz)^3\{v_0^2 - 2g(z-z_0)\} d\varphi^2,$$

woraus sich für $d\varphi$ und nach (4) für dt folgende Werthe ergeben:

$$(5) \quad \begin{cases} d\varphi = \dfrac{r_0 w_0 \sqrt{4fz + (f'z)^2}\, dz}{2fz \sqrt{fz\{v_0^2 - 2g(z-z_0)\} - r_0^2 w_0^2}}, \\ dt = \dfrac{\sqrt{4fz + (f'z)^2}\, dz}{2\sqrt{fz\{v_0^2 - 2g(z-z_0)\} - r_0^2 w_0^2}}. \end{cases}$$

Der Zähler dieser Brüche kann nie imaginär werden, weil $fz = r^2$ und $(f'z)^2$ positive Grössen sind.

Sei zur Abkürzung

$$S = fz\{v_0^2 - 2g(z - z_0)\} - r_0^2 w_0^2,$$

so ist die Bahn des Punctes nur so lange reell, als $S \geqq 0$. Für $S = 0$ ist auch $\dfrac{dz}{d\varphi} = 0$ und $\dfrac{dz}{dt} = 0$, d. h. die Bahn des Punctes hat für $S = 0$ einen höchsten oder tiefsten Punct und ist horizontal.

Sei nun der Anfang $z = z_0$ der Bewegung nicht horizontal, so giebt die Gleichung $S = 0$ einen oder mehrere Werthe für z, in denen die Bewegung horizontal ist, in denen daher $v = w$. Das v eines solchen Werthes ergiebt sich aus (1). Nimmt man nun einen solchen Werth von z zum Anfang der Bewegung, so ist $w_0 = v_0$, und es wird

$$S = f(z)\{v_0^2 - 2g(z-z_0)\} - r_0^2 v_0^2$$

$$S = (z - z_0)\left\{v_0^2 \frac{fz - fz_0}{z - z_0} - 2g\, fz\right\}$$

Unter der angegebenen Voraussetzung ist nun S durch $(z - z_0)$ dann theilbar, wenn fz eine rationale Function ist, und die Gleichungen (5) gehen über in

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= \frac{r_0\, v_0 \sqrt{4\,fz + (f'z)^2}\; dz}{2\; fz \sqrt{(z - z_0)\left\{ v_0^2\, \dfrac{fz - fz_0}{z - z_0} - 2g\, fz \right\}}} \\ dt &= \frac{\sqrt{4\,fz + (f'z)^2}\; dz}{2 \sqrt{(z - z_0)\left\{ v_0^2\, \dfrac{fz - fz_0}{z - z_0} - 2g\, fz \right\}}} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

§. 2.

Die Gleichungen des §. 1 gelten für jede Rotationsoberfläche; denn durch $x^2 + y^2 = fz$ wird jede Rotationsoberfläche dargestellt, wenn man fz jede beliebige Function sein lässt.

Es sollen jedoch hier nur solche Rotationsoberflächen betrachtet werden, für welche fz eine rationale ganze Function ist, also die Form hat

$$x^2 + y^2 = fz = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\; z + a_m \quad (1)$$

und von diesen Flächen nur diejenigen, für welche die Integrale t und φ höchstens elliptische werden. Wenn fz eine rationale gebrochene Function ist, so übersteigen die Integrale t und φ die elliptischen, wie §. 5 gezeigt werden wird.

In (1) kann man durch passende Verschiebung des Coordinatenanfanges in der z-Achse einen Coefficienten (ausser a_0) etwa a_1 verschwinden lassen. Die Coordinaten x, y, z sind in einer beliebigen Maasseinheit M ausgedrückt. Führt man eine andere Maasseinheit m ein, so dass sich verhält $M : m = \alpha : 1$, so muss man x, y, z mit $\alpha x, \alpha y, \alpha z$ vertauschen. Dividirt man alsdann (1) durch α^2 und beachtet, dass $a_1 = o$ gemacht worden ist, so folgt

$$x^2 + y^2 = a_0\; \alpha^{m-2}\; z^m + a_2\; \alpha^{m-4}\; z^{m-2} + \ldots$$
$$+ a_{m-2}\; z^2 + a_{m-1}\; \alpha^{-1}\; z + a_m\; \alpha^{-2}.$$

Hier kann man einen beliebigen Coefficienten ausser a_{m-2}

(Coefficient von z^2) $= \pm 1$ setzen, je nachdem das entsprechende a $\gtrless$ o ist. Sei etwa $a_0 > o$, so folgt für $a_0\, \alpha^{m-2} = 1$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[m-2]{a_0}}.$$

Ist nun die Maasseinheit M willkürlich, so ist auch die andere Maasseinheit m nicht bestimmt, sondern nur mit M durch die Relation

$$M = m\,\alpha$$

verbunden.

In der Gleichung

$$x^2 + y^2 = b_0 z^m + b_2 z^{m-2} + b_3 z^{m-3} + \ldots + b_{m-1}\; z + b_m$$

bestimmt irgend eine Constante die Maasseinheit. Giebt man dann den übrigen Constanten bestimmte numerische Werthe, so erhält man eine bestimmte Art Flächen; wird alsdann noch die Maasseinheit fixirt, so erhält man eine bestimmte Fläche, wie z. B. eine Kugel mit einem bestimmten Radius. Da ferner der Coefficient von z^2 durch eine Aenderung der Maasseinheit nicht auf die Einheit gebracht werden kann, so muss die Gestalt der Fläche

$$x^2 + y^2 = c z^2$$

von der Grösse der Masseinheit unabhängig sein.

Bezeichnet man in §. 1 (6)

$$R = 4\,fz + (f'z)^2,$$

$$S = (z - z_0) \left\{ v_0^2 \frac{fz - fz_0}{z - z_0} - 2g\, fz \right\},$$

so ist R nur von der Fläche, S aber von der Fläche, von der Schwerkraft und von der Anfangsgeschwindigkeit und dem Anfangsorte der Bewegung abhängig. S hat keine Wurzel, die nur von der Fläche abhinge. Denn die Wurzel z_0 ist der Anfangsort der Bewegung, und verschwände

$$v_0^2 \frac{fz - fz_0}{z - z_0} - 2g\, fz$$

für einen von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unabhängigen Werth

z, so müssten $\frac{fz - fz_0}{z - z}$ und fz einzeln verschwinden. Entwickelt man $\frac{fz - fz_0}{z - z_0}$ in eine Reihe nach Potenzen von z, so ist

$$\frac{fz - fz_0}{z - z_0} = a_0 z^{m-1} + a_0 z_0 z^{m-2} + (a_0 z_0^2 + a_2) z^{m-3}$$
$$+ (a_0 z_0^3 + a_2 z_0 + a_3) z^{m-4} + \ldots$$
$$+ (a_0 z_0^{m-2} + a_2 z_0^{m-4} + a_3 z_0^{m-5} + \ldots a_{m-3} z_0 + a_{m-2}) z$$
$$+ a_0 z_0^{m-1} + a_2 z_0^{m-3} + a_3 z_0^{m-4} + \ldots a_{m-2} z_0 + a_{m-1} = 0$$

Soll diese Reihe unabhängig von z_0 verschwinden, so müssen $a_0 = a_2 = a_3 = a_4 \ldots = a_{m-2} = 0$ und folglich auch $a_{m-1} = 0$ sein. Dann aber muss wegen $fz = 0$ auch $a_m = 0$ sein, d. h. fz muss identisch verschwinden. Die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ stellt aber keine reelle Rotationsfläche mehr dar, sondern nur einen Punct.

§. 3.

Die Wurzeln von $R = 0$ hängen nur von der Fläche ab, und da $S = 0$ solche Wurzeln nicht hat, so haben R und S keinen Factor gemein, wenigstens so lange nicht, als man die Anfangszustände keiner Beschränkung unterwirft.

Wenn z_0 und v_0 völlig willkürlich bleiben sollen, kann auch die Gleichung $S = 0$ nicht zwei gleiche Wurzeln haben, d. h. die Function S enthält keinen quadratischen Factor. Denn die Annahme eines solchen führt stets wieder auf die Bedingung fz identisch $= 0$.

Damit nun die Integrale φ und t höchstens elliptische werden, ist unbedingt nothwendig, dass fz den dritten Grad nicht übersteigt. Es muss also nach Seite 9 fz eine der folgenden vier Formen haben

1. $fz = \pm 1$,
2. $fz = \pm z$,

3. $fz = \alpha z^2 + b$,

4. $fz = \pm z^3 + az + b$.

In der 3. Form ist entweder $b = o$ oder $b = \pm 1$.

Für die erste Form $x^2 + y^2 = 1$ (-1 würde eine imaginäre Fläche liefern) werden φ und t Integrale von der Form

$$C \int \frac{dz}{\sqrt{z - z_0}}$$

φ und t werden also algebraische Functionen. Indessen braucht dieser Fall nicht durch Rechnung untersucht zu werden; denn der schwere Punct geht mit gleichförmiger horizontaler Geschwindigkeit in dem geraden Cylinder $x^2 + y^2 = 1$ herum und sinkt hierbei nach den Gesetzen des freien Falles. Rollt man den Cylinder in eine Ebene auf, so ist die Bahn des Punctes eine Parabel.

Für die zweite Form $x^2 + y^2 = \pm z$ wird S vom zweiten und R vom ersten Grade; die Integrale φ und t werden also elliptische.

Für die dritte Form $x^2 + y^2 = \alpha z^2 + b$ wird S vom dritten und R vom zweiten Grade.

Sollen hier die Integrale φ und t elliptische werden, so muss R das Quadrat einer rationalen Function sein. Nun ist aber

$$R = 4fz + (f'z)^2 = 4\alpha z^2 + 4b + 4\alpha^2 z^2$$
$$= 4\alpha \left\{ (1 + \alpha) z^2 + \frac{b}{\alpha} \right\}$$

und wird ein Quadrat einer rationalen Function in folgenden 2 Fällen (da $\alpha \gtrless o$ sein muss)

1. $\alpha = -1$, $b = 1$

2. $\alpha > 0$, $b = 0$

Für $\alpha < -1$ und $b = 0$ wird zwar R auch ein Quadrat; indessen die Fläche

$$x^2 + y^2 = \alpha z^2$$

wird imaginär wenn $\alpha < o$.

Hiernach werden die Integrale φ und t elliptische auf der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

und auf dem Rotationskegel

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 z^2,$$

wo α^2 statt α geschrieben wurde, um anzudeuten, dass diese Constante immer positiv sein muss.

Für die vierte Form

$$x^2 + y^2 = \alpha z^3 + az + b,$$

wo $\alpha = \pm 1$, wird S vom vierten und R vom vierten Grade. Sollen nun die Integrale φ und t die elliptischen nicht übersteigen, so muss R das Quadrat einer rationalen Function sein. Es ist aber

$$R = 4fz + (f'z)^2 = 4\alpha z^3 + 4az + 4b + (3\alpha z^2 + a)^2$$
$$= 9z^4 + 4\alpha z^3 + 6\alpha a z^2 + 4az + a^2 + 4b.$$

Nach den Coefficienten von z^4, z^3 und z^2 kann nur sein

$$R = \left\{ 3z^2 + \tfrac{2}{3}\alpha z + \alpha a - \tfrac{2}{27} \right\}^2.$$

Entwickelt man dieses Quadrat und setzt die Coefficienten von z und z^0 in beiden Ausdrücken einander gleich, so folgen aus diesen zwei Bedingungsgleichungen die Werthe

$$a = -\frac{\alpha}{27}$$

$$b = \frac{2}{729}$$

Setzt man diese Werthe ein, so wird für die Function

$$fz = \alpha z^3 - \frac{\alpha}{27} z + \frac{2}{729} = \alpha z \left(z^2 - \frac{3}{9^2}\right) + \frac{2}{9^3}$$

$$R = \left(3z^2 + \frac{2}{3}\alpha z - \frac{1}{9}\right)^2.$$

Führt man eine andere Maasseinheit ein, die das Neunfache

der früheren ist, schreibt also $\frac{x}{9}$, $\frac{y}{9}$, $\frac{z}{9}$ statt x y z, so folgt

$$x^2 + y^2 = fz = \frac{1}{9}\left\{ \alpha z\,(z^2 - 3) + 2 \right\}$$

$$= \frac{1}{9}(\alpha z - 1)^2\,(\alpha z + 2),$$

$$R = \frac{1}{9}(z^2 + 2\,\alpha z - 3)^2$$

$$R = \frac{1}{9}(\alpha z - 1)^2(\alpha z + 3)^2.$$

Verschiebt man noch den Coordinatenanfang in der z-Achse um die positive oder negative Maaseinheit, schreibt also $z + \alpha$ statt z, so folgt

$$fz = \frac{1}{9}\, z^2\,(\alpha z + 3)$$

$$R = \frac{1}{9}\, z^2\,(\alpha z + 4)^2.$$

§. 4.

Um sich die Rotationsfläche dritter Ordnung

(1) $$x^2 + y^2 = \frac{1}{9}\, z^2\,(\alpha z + 3)$$

vorzustellen, genügt es, ein Bild der sie durch Rotation um die z-Achse erzeugenden Curve

(2) $$z^2\,(\alpha z + 3) = 9 r^2$$

zu entwerfen. Es ist entweder $\alpha = + 1$ oder $\alpha = - 1$. Vertauscht man aber z mit $-$ z, so gehen die beiden verschiedenen Gleichungen (1) in einander über; d. h. von den beiden Rotationsoberflächen (1) ist die eine die umgestürzte andere. Dasselbe gilt von den beiden Curven (2). Man braucht daher nur die eine Curve ($\alpha = + 1$) zu construiren. Diese giebt von oben nach unten umgewendet die zweite Curve ($\alpha = - 1$). Für $\alpha = 1$ wird aus (2)

(2*) $$z^2 (z + 3) = 9r^2.$$

Die Curve ist symmetrisch zur z-Achse und hat den tiefsten Punct $r = 0$, $z = -3$, schneidet sich selbst im Coordinatenanfang $r = o$, $z = o$ und erstreckt sich nach rechts und links in das Unendliche 3. Ordnung, wenn sie sich nach oben in das Unendliche 2. Ordnung erstreckt.

Die Ableitungen von z nach r sind

$$z' = \frac{dz}{dr} = \frac{2\sqrt{z + 3}}{z + 2},$$

$$z'' = \frac{d^2z}{dr^2} = -\frac{2(z + 4)}{(z + 2)^3}$$

und hieraus folgt der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{z''} = \frac{(z + 4)^2}{2}.$$

Hieraus ergeben sich noch folgende Bemerkungen zur Construction der Curve. Dieselbe hat im tiefsten Puncte $r = o$, $z = -3$ eine horizontale Tangente und ist in ihren unendlich hohen Puncten wiederum horizontal. In den Puncten $z = -2$, $r = \pm \frac{2}{3}$ hat die Curve vertikale Tangenten. Für $z = o$ wird $z' = \sqrt{3}$, d. h. die Tangenten im Doppelpuncte $r = o$, $z = o$ bilden mit der r-Achse Winkel $= \pm 60^0$ und die beiden Curvenzweige schneiden sich unter einem Winkel von 60^0. Für $z = 6$ wird auch $r = \pm 6$ und die Tangenten haben in diesen Puncten die Richtungen

$$z' = \pm \frac{3}{4}.$$

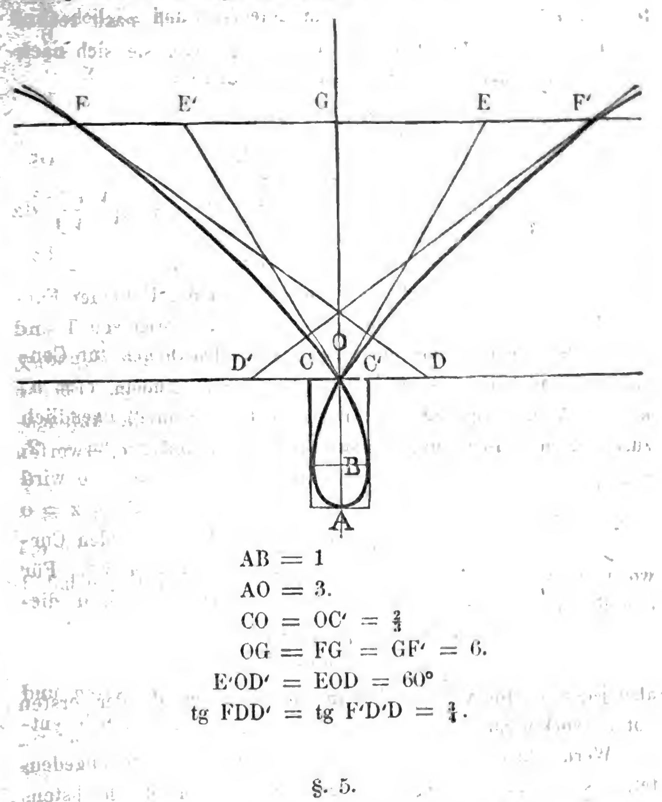
Die Krümmung ist im tiefsten Puncte am stärksten und nimmt nach oben nahezu quadratisch ab. Es ist nämlich entsprechend

$$z = -3,\ \varrho = \tfrac{1}{2}$$
$$z = -2,\ \varrho = 2$$
$$z = 0,\ \varrho = 8$$
$$z = 6,\ \varrho = 50$$
$$z = \infty,\ \varrho = \infty . \infty$$

Hiernach hat die die Rotationsoberfläche

$$9(x^2 + y^2) = z^2(z + 3)$$

erzeugende Curve folgende Gestalt.



$AB = 1$
$AO = 3.$
$CO = OC' = \frac{2}{3}$
$OG = FG = GF' = 6.$
$E'OD' = EOD = 60^\circ$
$\text{tg } FDD' = \text{tg } F'D'D = \frac{3}{4}.$

§. 5.

Wenn in der allgemeinen Gleichung der Rotationsoberfläche

$$x^2 + y^2 = fz$$

fz eine rationale gebrochene Function ist, etwa

$$fz = \frac{4\psi z}{\chi z} = \frac{4\psi}{\chi},$$

wo ψ und χ rationale ganze Functionen sind, die keinen Factor gemein haben, so übersteigt das Integral t und folglich auch das Integral φ stets die elliptischen.

Es wird nämlich unter dieser Voraussetzung

$$dt = \frac{\sqrt{4fz + (f'z)^2}\, dz}{2\sqrt{fz\,\{v_0^2 - 2g(z - z_0)\} - r_0^2 v_0^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\psi\chi^3 + (\psi\chi' - \psi'\chi)^2}.dz}{\chi\sqrt{\chi}\sqrt{\psi\left\{v_0^2 - 2g(z-z_0)\right\} - \frac{r_0^2 v_0^2}{4}\chi}} = \frac{\sqrt{T}}{\chi\sqrt{\chi}\sqrt{U}}\,dz$$

ψ und χ haben keinen Factor gemein; also hat U keinen Factor, der nur von der Fläche abhängt. Die Factoren von T und χ aber hängen nur von der Fläche ab; also haben T und χ einerseits und U andererseits keinen Factor gemein. Ebenso kann U keinen quadratischen Factor haben, wenn die Anfangszustände der Bewegung keinen Beschränkungen unterworfen werden.

Sei ferner

$$\chi = u^\alpha\, v^\beta\, w^\gamma \ldots,$$

wo u, v, w ... keine gemeinsamen Factoren haben, so hat T den Factor

$$\left(u^{\alpha-1}\, v^{\beta-1}\, w^{\gamma-1} \ldots\right)^2,$$

also jeder Factor von χ, der in einer höheren als der ersten Potenz vorkommt.

Werde durch die Zeichen $\omega = (n)$ und $\omega = [n]$ angedeutet, dass die ganze Function ω resp. vom n-ten oder höchstens vom n-ten Grade ist, so wird das Integral t ein gemeines, wenn

1. $\chi = \upsilon^2, \quad \upsilon = (1); \ \psi = [1]$
2. $\chi = (1); \ \psi = (o)$

$\Big\}\ T = Q^2$

ein elliptisches, wenn

3. $\chi = v^4$, $v = (1)$; $\psi = [3]$		
4. $\chi = v^3$, $v = (1)$; $\psi = [2]$		
5. $\chi = v^2$, $v = (2)$; $\psi = [3]$		
6. $\chi = u.v^2$. $u=v=(1)$; $\psi = [2]$	}	$T = Q^2$
7. $\chi = v^2$, $v = (1)$; $\psi = (3)$		
8. $\chi = (2)$; $\psi = [1]$		
9. $\chi = (1)$; $\psi = (2)$		
10. $\chi = v^2$, $v = (1)$; $\psi = (2)$	}	$T = w. Q^2$, $w = [1]$
11. $\chi = (1)$; $\psi = (1)$		
12. $\chi = (1)$; $\psi = (0)$	}	$T = w. Q^2$, $w = (1)$
13. $\chi = v^2$, $v = (1)$; $\psi = [1]$		oder $w = (2)$.

Wenn $\chi = v^3$, $v = (1)$; $\psi = (3)$, übersteigt zwar U den 4. Grad nicht, allein es enthält dann $\frac{T}{\chi}$ den Factor v linear, kann also kein Quadrat sein.

In den meisten Fällen müsste T ein Quadrat sein, und es soll nun gezeigt werden, dass dies nicht möglich ist.

Sei $\chi = (n)$ und $\psi = (m)$, so hat das erste Glied $\psi\chi^3$ von $T = \psi\chi^3 + (\psi\chi' - \psi'\chi)^2$ den Grad $m + 3n$ und das zweite Glied den Grad $2(m + n - 1)$ oder einen um mindestens 2 Einheiten niederen Grad, wenn $m = n$. Schliesst man vorläufig den Fall $m = n$ aus, so hat T den Grad

$$m + 3n \text{ oder } 2(m + n - 1), \text{ je nachdem}$$
$$m + 3n \gtrless 2(m + n - 1), \text{ d. h. je nachdem}$$
$$n \gtrless m - 2.$$

Da aber n mindestens 1 sein muss (sonst wäre fz keine gebrochene Function) und m nie grösser als 3 sein kann und ausserdem die Fälle $n = 1$ und $m = 3$ nicht zusammen bestehen, so bestimmt in allen hier in Betracht kommenden Fällen $\psi\chi^3$ den Grad von T, und dieses um so mehr wenn $m = n$, denn dann ist das Glied $(\psi\chi' - \psi'\chi)^2$ von noch niederem Grade.

Setzt man nun

$T = \psi\chi^3 + (\psi\chi' - \psi'\chi)^2 = (Z \pm \psi\chi' \mp \psi'\chi)^2$, so folgt

$$\psi\chi^3 = Z \left\{ Z \pm 2(\psi\chi' - \psi'\chi) \right\},$$

und es muss Z^2 den Grad von $\psi\chi^3$ haben, also es muss sein

$$Z = \left(\frac{m + 3n}{2}\right)$$

$\frac{m + 3n}{2}$ ist aber nur dann eine ganze Zahl, also das Quadrat nur dann möglich, wenn m und n gleichzeitig gerade oder ungerade Zahlen sind.

Hiermit sind die Fälle 2. 7. 9. zu streichen, und T kann nur dann ein Quadrat sein, wenn

1. $\chi = v^2$, $v = (1)$; $\psi = (0)$
3a. $\chi = v^4$, $v = (1)$; $\psi = (0)$
3b. $\chi = v^4$, $v = (1)$; $\psi = (2)$
4. $\chi = v^3$, $v = (1)$; $\psi = (1)$
5a. $\chi = v^2$, $v = (2)$; $\psi = (0)$
5b. $\chi = v^2$, $v = (2)$; $\psi = (2)$
6. $\chi = uv^2$, $u = v = (1)$; $\psi = (1)$
8. $\chi = (2)$, $\psi = (0)$.

Sei nun

$$\psi = p\,(z-a_1)\,(z-a_2)\,(z-a_3),$$
$$\chi = q\,(z-\alpha_1)\,(z-\alpha_2)\,(z-\alpha_3)\,(z-\alpha_4),$$

wo mehrere a ebenso wie mehrere α einander gleich sein können, nie aber $a=\alpha$. Sind n Grössen a oder n Grössen α unendlich, so ist p oder q unendlich klein von der n^{ten} Ordnung. Alsdann ist

$$\psi' = \Sigma\frac{\psi}{z-a},\ \chi' = \Sigma\frac{\chi}{z-\alpha},$$

und es folgt

$$\psi\chi^3 = p\cdot q^3 (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-\alpha_1)^3(z-\alpha_2)^3(z-\alpha_3)^3(z-\alpha_4)^3$$
$$= Z\left\{Z \pm 2\psi\,\Sigma\frac{\chi}{z-\alpha} \mp 2\chi\,\Sigma\frac{\psi}{z-a}\right\} = ZX.$$

Z muss die eine Hälfte der Factoren von $\psi\chi^3$ enthalten und

X die andere Hälfte. Sind nun alle Factoren von χ von einander verschieden, so ist in X stets ein und nur ein Glied enthalten, das einen in Z vorkommenden Factor $(z-\alpha)$ nicht enthält, d. h. X ist nicht durch $(z-\alpha)$ theilbar. Damit daher $Z \,.\, X = \psi\, \chi^3$, muss Z den Factor $(z-\alpha)^n$ enthalten, wo entweder $n=3$ oder $n=0$.

Ist $\alpha_1 = \alpha_2$, so enthält X den Factor $(z-\alpha_1)$ nicht, wenn er nicht in Z vorkommt. Enthält Z den Factor $(z-\alpha_1)^n$, $n>1$, so enthält X nur den Factor $(z-\alpha_1)$, weil alle Glieder von X mit Ausnahme eines einzigen den Factor $(z-\alpha_1)^m$, $m>1$, enthalten. Kommt aber in Z der Factor $(z-\alpha_1)$ linear vor, so sind in X zwei Glieder, die nur den Factor $(z-\alpha_1)$ enthalten und X kann somit den Factor $(z-\alpha_1)^m$, $m>1$ enthalten. Damit also $Z \,.\, X$ den Factor $(z-\alpha_1)^6$ enthält, muss in Z der Factor $(z-\alpha_1)^n$ vorkommen, wo entweder $n=5$ oder $n=1$.

Ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, so findet man durch dieselbe Schlussweise, dass Z den Factor $(z-\alpha_1)^n$, $n=7$ oder $n=2$ enthalten muss, damit ZX den Factor $(z-\alpha_1)^9$ enthalten kann.

Ist endlich $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$, so muss Z den Factor $(z-\alpha_1)^n$, $n=9$ oder $n=3$ enthalten, damit der Factor $(z-\alpha_1)^{12}$ in ZX vorkommt.

Ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, kann man setzen

$$\frac{\psi}{\chi} = \frac{p\, x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m}{x^n \quad + q_2 x^{n-2} + \ldots + q_n},$$

wo man noch durch Aenderung der Maasseinheit einen Coefficienten gleich ± 1 machen kann.

Hiermit kann nun T ein Quadrat werden, wenn

1. $\chi = z^2$, $\psi = p$

3a. $\chi = z^4$, $\psi = p$

3b. $\chi = z^4$, $\psi = p\,(z-a)\,(z-b)$

4. $\chi = z^3$, $\psi = p\,(z-a)$

5a. $\chi = (z-\alpha)^2\,(z+a)^2$, $\psi = p$

5b. $\chi = (z-\alpha)^2\,(z+\alpha)^2$, $\psi = p\,(z-a)\,(z-b)$

6. $\chi=(z-\alpha)^2\ (z+2\alpha),\ \psi=p\ (z-a)$

8. $\chi=(z-\alpha)\ (z+\alpha),\ \psi=p$

Nach den vorigen Erörterungen kann Z und X nicht von gleich hohem Grade sein in den Fällen 1. 3a. 3b. 4., weil die beiden Factoren resp. sein müssten

1. $Z=pz^5,\ X=z$

3a. $Z=pz^9,\ X=z^3$

3b. $Z=pz^9,\ X=z^3\ (z-a)\ (z-b)$

4. $Z=pz^7,\ X=z^2\ (z-a)$.

Die übrigen Fälle bedürfen noch einer Untersuchung. Es kann nämlich sein in

5a. $Z=p\ (z-\alpha)^5\ (z+\alpha),\ X=(z-\alpha)\ (z+\alpha)^5$

5b. $Z=p\ (z-\alpha)^5\ (z+\alpha)\ (z-a),\ X=(z-\alpha)(z+\alpha)^5(z-b)$

6. $Z=p\ (z-\alpha)^5,\ X=(z-\alpha)\ (z+2\alpha)^3\ (z-a)$

8. $Z=p\ (z-\alpha)^3,\ X=(z+\alpha)^3$.

Es ist nun in diesen Fällen

5a. $\chi'=4z\ (z-\alpha)\ (z+\alpha),\ \psi'=0$

5b. $\chi'=4z\ (z-\alpha)\ (z+\alpha),\ \psi'=p\ (2z-a-b)$

6. $\chi'=3\ (z-\alpha)\ (z+\alpha),\ \psi'=p$

8. $\chi'=2z,\qquad \psi'=0,$

und die Gleichung

$$Z\pm2\psi\chi'\mp2\psi'\chi=X$$

geht über in

5a. $p\,(z-\alpha)^5(z+\alpha)\ \pm\ 8pz\ (z-\alpha)\ (z+\alpha)\ =\ (z-\alpha)\ (z+\alpha)^5,$

$$p(z-\alpha)^4\ \pm\ 8pz\ =\ (z+\alpha)^4,$$

eine Bedingung, die für keine Werthe von p und α erfüllt werden kann.

5b. $p(z-\alpha)^5\ (z+\alpha)\ (z-a)\ \pm\ 8p(z-a)\ (z-b)\,z\,(z-\alpha)\ (z+\alpha)$

$$\mp2p\,(z-\alpha)^2(z+\alpha)^2\,(2z-a-b)=(z-\alpha)\,(z+\alpha)^5(z-b),$$

$$p(z-\alpha)^4(z-a)\pm 8p\,(z-a)(z-b)\,z\ \mp\ 2p\,(z-\alpha)\,(z+\alpha)(2z-a-b)$$
$$=\ (z+\alpha)^4\ (z-b).$$

Zunächst muss $p=1$ sein, damit die Coefficienten von z^5 auf beiden Seiten einander gleich werden. Damit ferner die

linke Seite den Factor $(z+\alpha)$ enthält und die Coefficienten von z^4 und z^0 auf beiden Seiten einander gleich werden, müssen folgende Bedingungen gelten:

$$8\alpha\,[2\alpha^3 \pm (\alpha+b)]\,(\alpha+a)=0,$$
$$4\alpha+a = -4\alpha+b,$$
$$\alpha^4 a \pm 2\alpha^2\,(a+b) = \alpha^4 b.$$

Es darf nicht sein $\alpha+a=0$, sonst hätten ψ und χ einen Factor gemein; ebenso darf nicht sein $\alpha=0$, sonst erhielte man den Fall 3 b. Hiermit werden die obigen Bedingungen

$$2\alpha^3 \pm \alpha \pm b=0$$
$$8\alpha + a-b=0$$
$$\alpha^2\,(a-b) \pm 2(a+b) = 0,$$

aus denen sich die Werthe ergeben

$$\alpha = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\mp 5},\ a = \mp \tfrac{13}{4}\sqrt{\mp 5},\ b = \pm \tfrac{3}{4}\sqrt{\mp 5}.$$

Die imaginären Werthe sind nicht zu brauchen, weil nicht $a=-b$, und überhaupt genügen diese Werthe den übrigen zu stellenden Bedingungen nicht, z. B. nicht derjenigen, dass die linke Seite von 5b den Factor $(z-b)$ enthalten muss. Es müsste nämlich hierzu sein:

$$(b-\alpha)^3 \mp 2(b+\alpha) = 0,$$

was nicht der Fall ist.

6. $p\,(z-\alpha)^5 \pm 6p(z-\alpha)\,(z+\alpha)\,(z-a) \mp 2p\,(z-\alpha)^2\,(z+2\alpha)$
$$= (z-\alpha)\,(z+2\alpha)^3\,(z-a),$$
$$p\,(z-\alpha)^4 \pm 6p(z+\alpha)\,(z-a) \mp 2p\,(z-\alpha)\,(z+2\alpha) = (z+2\alpha)^3(z-a).$$

Zunächst muss sein $p=1$, damit die Coefficienten von z^4 einander gleich werden. Sei ferner die linke Seite $=F(z)$, so muss u. A. sein $F(-2\alpha)=0$ und $F''(-2\alpha)=0$, d. h.

$$F(-2\alpha) = 81\alpha^4 \pm 6\alpha(2\alpha+a) = 0$$
$$F''(-2\alpha) = 108\,\alpha^2 \pm 12 \mp 4 = 0.$$

Es darf nicht sein $\alpha=0$ (sonst Fall 4.), und es folgt daher

$$27\,\alpha^3 \pm 2(2\alpha+a) = 0$$
$$27\,\alpha^2 \pm 2 \qquad = 0,$$

woraus sich ergiebt

$$\alpha = -a = \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{\mp \tfrac{2}{3}},$$

welche Werthe nicht der Bedingung genügen, dass die Coefficienten von z^3 auf beiden Seiten einander gleich sind, d. h. dass ist

$$-4\alpha = 6a - a.$$

8. $$p(z-\alpha)^3 \pm 4pz = (z+\alpha)^3,$$

eine Bedingung, welche nicht erfüllt werden kann.

In den Fällen 10. und 11. ist T von geradem Grade und müsste daher auch ein Quadrat sein. Es ist hier

10. $\chi = z^2,\ \psi = p(z-a)\ (z-b),$

11. $\chi = z,\ \psi = p(z-a).$

In keinem dieser Fälle kann aber T ein Quadrat sein, weil

10. $Z = pz^5,\ X = z\ (z-a)\ (z-b),$

11. $Z = pz^3,\ X = (z-a),$

also Z und X von ungleichem Grade sind.

Für die Fälle 12. und 13. endlich ergeben sich die Bedingungen:

12. $\chi = z,\ \psi = p;\ T = (z-\alpha)\ Q^2$

13a. $\chi = z^2,\ \psi = p;\ T = (z-\alpha)\ (z-\beta)\ Q^2,\ \alpha \gtrless \beta$

13b. $\chi = z^2,\ \psi = p\ (z-a);\ T = (z-\alpha)\ Q^2$

---

12. $\chi' = 1,\ \psi' = 0,$

13a. $\chi' = 2z,\ \psi' = 0,$

13b. $\chi = 2z,\ \psi' = p.$

Nun ist aber

12. $T = \psi\chi^3 + (\psi\chi' - \psi'\chi)^2 = pz^3 + p^2 = p(z^3+p),$

und es müsste $F(z) = z^3+p$ einen quadratischen Factor enthalten, was nicht der Fall ist, da $F'(z) = 3z^2$ mit $F(z)$ keinen Factor gemein hat.

13a. $T = \psi\chi^3 + (\psi\chi' - \psi'\chi)^2 = pz^6 + 4p^2z^2 = pz^2\ (z^4 + 4p),$ wo $F(z) = z^4 + 4p$ aus denselben Gründen wie in 12. keinen quadratischen Factor enthalten kann.

13b. $T=\psi\chi^3+(\psi\chi'-\psi'\chi)^2 = p(z-a)\,z^6+[2p(z-a)\,z-pz^2]^2$
$= pz^2\,\{(z-a)\,z^4 + p\,(z-2a)^2\}$

Es muss nun sein:

$$F(z) = (z-a)\,z^4 + p(z-2a)^2 = (z-\alpha)\,Q^2, \quad \text{also auch}$$
$$(z-\alpha)\,F(z) = \{(z-\alpha)\,Q\}^2 = Q_1^{\,2}.$$

Es ist aber

$$(z-\alpha)\,F(z) = z^6 - (a+\alpha)z^5 + a\alpha z^4 + pz^3 - p(4a+\alpha)z^2 + 4pa\,(a+\alpha)\,z - 4pa^2\alpha.$$

Nach den Coefficienten von z^6, z^5, z^4, z^3 kann nur sein:

$$(z-\alpha)\,(Fz) = \left\{z^3 - \frac{a+\alpha}{2}z^2 - \tfrac{1}{8}(a-\alpha)^2 z + \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{16}(a+\alpha)\,(a-\alpha)^2\right\}^2.$$

Quadrirt man und setzt die Coefficienten von z^2, z^1, z^0 in beiden Ausdrücken einander gleich und beachtet noch, dass durch geeignete Maasseinheit $p = \pm 1$ gesetzt werden kann, so dass $p^{2n} = 1$, $p^{2n+1} = p$, so folgen die Bedingungen:

$$\tfrac{1}{64}(a-\alpha)^4 - \frac{p}{2}\,(a+\alpha) + \tfrac{1}{16}\,(a+\alpha)^2\,(a-\alpha)^2 = -\,p(4a+\alpha)$$
$$-\frac{p}{8}\,(a-\alpha)^2 + \tfrac{1}{64}\,(a+\alpha)\,(a-\alpha)^4 = 4pa\,(a+\alpha)$$
$$\tfrac{1}{4} - \frac{p}{16}\,(a+\alpha)\,(a-\alpha)^2 + \tfrac{1}{256}\,(a+\alpha)^2\,(a-\alpha)^4 = -\,4pa^2\alpha.$$

Sei

$$a+\alpha = px \quad\Big|\quad a = p\frac{x+2y}{2}$$
$$a-\alpha = 2py \quad\Big|\quad \alpha = p\,\frac{x-2y}{2},$$

so gehen die obigen Bedingungen über in

$$y^4 + x^2y^2 + 12\,y + 8x = 0$$
$$xy^4 - 2\,y^2 - 16xy - 8x^2 = 0$$
$$x^2y^4 - 64y^3 - 36xy^2 + 16x^2y + 8x^3 + 4 = 0.$$

Ordnet man nach Potenzen von x und setzt statt der dritten die halbe Summe dritten und der in x multiplicirten zweiten Gleichung, so folgt

1. $y^2x^2 + 8x + y^4 + 12\,y = 0$
2. $8\,x^2 + (16y - y^4)\,x + 2y^2 = 0$
3. $y^4x^2 - 19y^2x - 32y^3 + 2 = 0.$

Hieraus folgt weiter:

4. $27y^2x + y^6 + 44y^3 - 2 = 0,$

5. $(64-16y^3+y^6)\, x + 6y^4 + 96y = 0.$

6. $(218-44y^3-y^6)\, x + 27y^4 + 324y = 0$

wo 4. aus 1. und 3., 5. aus 1. und 2., 6. aus 1. und 4. abgeleitet ist.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich weiter:

$$\frac{y^6+44y^3-2}{27 \cdot y^2} = \frac{6y(y^3+16)}{64-16y^3+y^6} = \frac{27 \cdot y(y^3+12)}{218-44y^3-y^6}.$$

Setzt man $y^3 = u$, so erhält man eine kubische und eine biquadratische Gleichung in u, die eine oder mehrere gemeinsame Wurzeln haben müssen, wenn $(z-\alpha)\, F(z) = Q_1^{\,2}$ sein soll. Diese Gleichungen sind nun:

$$2(u+16)(218-44u-u^2) = 9(u+12)(64-16u+u^2),$$

$$(u^2+44u-2)(64-16u+u^2) = 162 \cdot u\,(u+16),$$

also

$$m = 11u^3 + 84u^2 - 180u - 64 = 0$$

$$n = u^4 + 28u^3 - 804u^2 + 256u - 128 = 0.$$

Da $u = 0$ nicht eine gemeinsame Wurzel ist, so muss die gemeinsame Wurzel enthalten sein in

$$\frac{n-2m}{u} = p = u^3 + 6u^2 - 972u + 616 = 0.$$

Die gemeinsame Wurzel muss auch enthalten sein in

$$\frac{m-11p}{18} = q = u^2 + 584u - 380 = 0.$$

Die Wurzeln von $q=0$ sind nun

$$u_1 = 0{,}64996,\ u_2 = -584{,}64996,$$

aber weder die eine noch die andere ist eine Wurzel von $m=0$ und $n=0$; denn es ist

$$m(u_1) < 0,\ m(u_2) < 0$$

$$n(u_1) < 0,\ m(u_2) > 0.$$

Hiermit sind alle möglichen Fälle erschöpft, und es kann in keinem derselben das Integral t, also auch das Integral φ ein elliptisches werden.

§. 6.

Nach §. 3 führt die reibungslose Bewegung eines schweren Punctes unter allen Rotationsoberflächen von der Form $x^2 + y^2 = f(z)$, wo $f(z)$ eine rationale ganze Function ist, nur auf folgenden vier auf elliptische Integrale:

1. auf den beiden Paraboloiden

$$x^2 + y^2 = \pm z,$$

von denen das eine das umgestürzte andere ist,

2. auf der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

3. auf dem Kegel

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 z^2$$

und 4. auf den beiden Flächen 3. Grades

$$9(x^2 + y^2) = z^2 (3 \pm z),$$

von denen die eine die umgestürzte andere ist.

Die reibungslose Bewegung eines schweren Punctes auf einer Kugel oder das sphärische Pendel soll hier als bekannt übergangen und jene Bewegung nur auf den drei übrigen Rotationsoberflächen betrachtet werden.

Die reibungslose Bewegung auf dem oben offenen Rotationsparaboloide

$$x^2 + y^2 = z$$

wird ausgedrückt durch die Gleichungen

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} d\varphi &= \frac{r_0 v_0 \sqrt{4z + 1}\, dz}{2z \sqrt{(z - z_0)(v_0^2 - 2gz)}}, \\ dt &= \frac{\sqrt{4z + 1}\, dz}{2 \sqrt{(z - z_0)(v_0^2 - 2gz)}}, \end{aligned} \right.$$

die sich aus (6) § 1 ergeben für

$$fz = z, \quad f'z = 1.$$

Sei $\frac{v_0^2}{2g} = z_1$, so bewegt sich nach den Gleichungen (1) der schwere Punct zwischen den beiden Parallelkreisen $z = z_0$ und $z = z_1$ auf und ab, und es ist das Stück der Bahn vom höchsten zum tiefsten Puncte umgekehrt gleichgestaltet dem Stücke vom tiefsten zum höchsten Puncte. Wird die Anfangsgeschwindigkeit so bestimmt, dass

$$\frac{v_0^2}{2g} = z_1 = z_0,$$

dass also die beiden Kreise z_0 und z_1 zusammenfallen, so bewegt sich der schwere Punct immer mit der Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2gz_0}$ im Kreise $z = z_0$.

Ohne die Allgemeinheit zu beschränken, kann man $z_0 > z_1$ annehmen. Denn ist $z_0 > z_1$, so berechne man aus (1) §. 1 die Geschwindigkeit v_1 und vertausche die Indices 0 und 1 mit einander.

Da noch $r_0 = \sqrt{z_0}$ und $\frac{v_0}{\sqrt{2g}} = \sqrt{z_1}$, so nehmen die Gleichungen (1) folgende Gestalt an:

$$(2) \begin{cases} d\varphi = \frac{\sqrt{z_0 z_1}}{2} \, \frac{\sqrt{4z+1}\, dz}{z\sqrt{(z-z_0)(z_1-z)}}, \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{2g}} \, \frac{\sqrt{4z+1}\, dz}{\sqrt{(z-z_0)(z_1-z)}}. \end{cases}$$

Setzt man hier

$$z = z_1 - (z_1 - z_0)\, x^2, \quad dz = -2(z_1 - z_0)\, x\, dx,$$

so dass x von 1 bis 0 abnimmt, wenn z von z_0 bis z_1 wächst, und führt noch zur Abkürzung die Bezeichnungen ein:

$$\frac{4(z_1 - z_0)}{4z_1 + 1} = k^2, \quad \frac{z_1 - z_0}{z_1} = l^2,$$

$$\text{wo } k^2 < l^2 < 1,$$

so gehen die Gleichungen (2) in die Normalformen über:

$$(3)\begin{cases} d\varphi = \dfrac{4\sqrt{z_0 z_1}}{\sqrt{4z_1+1}} \cdot \dfrac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ \qquad + \dfrac{\sqrt{z_0}}{\sqrt{z_1(4z_1+1)}} \cdot \dfrac{-dx}{(1-l^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \\ dt = \dfrac{\sqrt{4z_1+1}}{\sqrt{2g}} \cdot \dfrac{-dx\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}. \end{cases}$$

Somit ist φ als die Summe eines elliptischen Integrals erster und eines solchen dritter Gattung und t als ein elliptisches Integral zweiter Gattung dargestellt.

§. 7.

Das zweite unten offene Paraboloid

$$x^2 + y^2 = -z$$

hat die Gleichung des ersten, wenn man die positive Richtung der z-Achse nach unten nimmt. Dann aber hat die positive Richtung der z-Achse mit der Schwere einerlei Richtung, und man muss daher in den Gleichungen des vorigen §. $-g$ mit $+g$ vertauschen. Hiermit nehmen aber diese Gleichungen (1), wenn man wieder $\frac{v_0^2}{2g} = z_1$ setzt, folgende Gestalt an:

$$(1)\begin{cases} d\varphi = \dfrac{\sqrt{z_0 z_1}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{4z+1}\,dz}{z\sqrt{(z-z_0)(z+z_1)}}, \\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{2g}} \dfrac{\sqrt{4z+1}\,dz}{\sqrt{(z-z_0)(z+z_1)}}. \end{cases}$$

Die Bahn des schweren Punctes erstreckt sich hier von $z = z_0$ abwärts ins Unendliche.

Substituirt man

$$z = \frac{4z_0 + x^2}{4(1-x^2)}, \quad dz = \frac{4z_0 + 1}{2(1-x^2)^2}\,dx,$$

wo entsprechend

$$z = z_0,\ x = 0,$$
$$z = \infty,\ x = 1,$$

und setzt zur Abkürzung

$$\frac{4z_1 - 1}{4(z_0 + z_1)} = \delta, \text{ wo stets } \delta^2 < 1,$$

so gehen die Gleichungen (1) über in

$$\text{(2a)}\quad d\varphi = \frac{4z_0 + 1}{2z_0}\sqrt{\frac{z_0\, z_1}{z_0 + z_1}} \cdot \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{4z_0}\right)\sqrt{(1-x^2)(1-\delta x^2)}}$$

$$\text{(2b)}\quad dt = \frac{4z_0 + 1}{2\sqrt{2g}\sqrt{z_0+z_1}} \cdot \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-\delta x^2)}}.$$

Somit ist φ ausgedrückt durch ein elliptisches Integral 3. Gattung. t ist zwar auch scheinbar 3. Gattung, lässt sich aber auf elliptische Integrale 1. und 2. Gattung und auf einen algebraischen Theil bringen. Es ist nämlich

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x\sqrt{1-\delta x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \frac{\sqrt{1-\delta x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2\sqrt{1-\delta x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$- \frac{\delta \cdot x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-\delta x^2)}} = \frac{\sqrt{1-\delta x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + (1-\delta)\left\{\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-\delta x^2)}}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-\delta x^2)}}\right\},$$

und somit ist

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-\delta x^2)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\delta x^2)}}$$

$$- \frac{1}{1-\delta}\int\frac{\sqrt{1-\delta x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{1}{1-\delta}\,\frac{x\cdot\sqrt{1-\delta x^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Grösse δ kann ein positiver oder negativer echter Bruch oder Null sein. Ist $\delta > o$, so setze man $\delta = k^2$ und die obigen Formen sind die Normalformen; ist aber $\delta < o$, so vertausche man x^2 mit $1 - x^2$, und man erhält auch sofort die Normalformen für t und φ.

Wenn $\delta = o$, also $z_1 = \frac{1}{4}$, $v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2g}$,

führen die Integrale φ und t auf algebraische und Kreisfunctionen. Unter dieser Voraussetzung folgt nämlich aus (1):

$$d\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{z_0}\,\frac{dz}{z\sqrt{z-z_0}},$$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}}\,\frac{dz}{\sqrt{z-z_0}},$$

als deren Integrale sich ergeben

$$\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{z-z_0}{z_0}}$$

$$t = \frac{2}{\sqrt{2g}}\sqrt{z-z_0}\,.$$

Nimmt man diese Integrale nach der ganzen Tiefe des Paraboloids, also von $z = z_0$ bis $z = \infty$, so wird zwar die Zeit $t_\infty = \infty$, nicht aber der Winkel φ_∞, um den die Bahn im tiefsten Puncte vom Meridian durch den höchsten Punct abweicht. Es ist nämlich

$$\varphi_\infty = \left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{z-z_0}{z_0}}\right]_{z=z_0}^{z=\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Nimmt man den Meridian durch den höchsten Punct der Bahn zur Ebene der x, z, so ist für jeden Punct des Paraboloides

$$x = r\,.\,\cos\varphi,\ y = r\,.\,\sin\varphi,$$

also $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$, oder $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Für die Puncte der Bahn gilt nun die Gleichung

$$\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{z-z_0}{z_0}};$$

also muss für diese Puncte auch die Gleichung gelten

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{z-z_0}{z_0}} \quad \text{oder}$$

$$z_0\,(x^2 + y^2) = zx^2.$$

Nun ist aber $x^2 + y^2 = z$ und nach der Lage der x, y Ebene $z_0 = x_0^2$, $y_0 = 0$, also ist nach der letzten Gleichung

$$x^2 - x_0^2 = 0,$$

d. h. die Bahn des Punctes liegt in der Ebene $x = x_0$. Da, nun jedes Paraboloid von einer zur Achse parallelen Ebene in

einer Parabel geschnitten wird, so ist die Bahn des schweren Punctes eine Parabel, wenn die Anfangsgeschwindigkeit

$$v_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2g}\,:$$

Fasst man das Element $d\varphi$ in (1) als Function von z_1 auf, so ist

$$d\varphi = \sqrt{\frac{z_1}{z+z_1}}\,.\,Z\,.\,dz$$

wo Z von z_1 unabhängig ist. Der Bruch $\frac{z_1}{z+z_1}$ wächst aber gleichzeitig mit z_1, und es wird daher das Element $d\varphi$ mit z_1 gleichzeitig grösser und kleiner. Hieraus folgt in Verbindung mit den Resultaten für $z_1 = \frac{1}{4}$, also für $v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2g}$, dass für $z_1 < \frac{1}{4}$, also für $v_0 < \frac{1}{2}\sqrt{2g}$ die Bahn des schweren Punctes gänzlich auf der äusseren Seite der zum Meridian durch den höchsten Punct senkrechten durch den höchsten Punct gehenden und zur Rotationsachse parallelen Ebene liegt, wo die Seite die innere genannt ist, auf welcher die Rotationsachse liegt.

Für $z_1 > \frac{1}{4}$, also für $v_0 > \frac{1}{2}\sqrt{2g}$ liegt wenigstens der obere Theil der Bahn auf der inneren Seite jener Ebene. Die Curve kann aber nach der Grösse von z_1 diese Ebene mehrmals schneiden. Das Integral φ wird im Allgemeinen nicht unendlich, also kann der schwere Punct nicht unendlich oft um das Paraboloid herumgehen, sondern muss einen Meridian zur Asymptote haben. Nur für $z_1 = \infty$, d. h. für $v_0 = \infty$ wird $\varphi_\infty = \infty$, nämlich nach (2a) $\delta = 1$, also

$$d\varphi = \frac{4z_0+1}{2\sqrt{z_0}}\,\frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{4z_0}\right)(1-x^2)},$$

welches Integral bis zur Grenze $z = \infty$, d.i. $x = 1$ unendlich gross wird.

§. 8.

Für den Fall $z_1 = \frac{1}{4}$, d. h. für $v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2g}$ war die Bahn des Punctes eine Parabel. Da nun auch ein schwerer Punct mit einer horizontalen Anfangsgeschwindigkeit im freien Raume eine Parabel beschreibt, so liegt die Vermuthung nahe, dass das Paraboloid für den Fall $z_1 = \frac{1}{4}$ der Bewegung des Punctes keinen Widerstand entgegensetze.

Bezeichnet N den Widerstand der Fläche, der in deren Normale wirkt, und α, β, γ die Winkel, welche die Normale mit den Coordinatenachsen einschliesst, so sind die allgemeinen Bewegungsgleichungen, wenn die z-Achse nach unten positiv genommen und zur Abkürzung

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx'}{dt} = x''$$

u. s. w. gesetzt wird

$$x'' = \pm N \cos \alpha,$$
$$y'' = \pm N \cos \beta,$$
$$z'' = g \pm N \cos \gamma,$$

womit der Widerstand der Fläche durch die Formel bestimmt ist

(1) $$N^2 = x''^2 + y''^2 + (g - z'')^2$$

Die Geschwindigkeit ist hier nach (1) in §. 1, da $-g$ mit $+g$ vertauscht werden muss,

(2) $$x'^2 + y'^2 + z'^2 = v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0) = 2g(z + z_1 - z_0).$$

Differentiirt man die Gleichung des Paraboloides $x^2 + y^2 = z$, so erhält man mit der vorhergehenden folgende beiden Gleichungen

(3) $$\begin{cases} xx' + yy' = \frac{1}{2} z' \\ x'^2 + y'^2 = v^2 - z'^2 \end{cases}$$

und durch nochmalige Differentiation

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} xx'' + yy'' &= \tfrac{1}{2} z'' - v^2 + z'^2, \\ x'x'' + y'y'' &= (g - z'')\, z', \end{aligned} \right.$$

da nach (2) $v \dfrac{dv}{dz} = g$.

Aus den beiden Gleichungen (3), sowie aus denen (4) folgen die Werthe

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{xz'}{2z} \mp y \sqrt{\frac{v^2}{z} - \frac{z'^2}{4z^2} - \frac{z'^2}{z}} \\ y' &= \frac{yz'}{2z} \pm x \sqrt{\frac{v^2}{z} - \frac{z'^2}{4z^2} - \frac{z'^2}{z}} \end{aligned} \right.$$

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} x''(xy'-x'y) &= y'(\tfrac{1}{2}z''-v^2+z'^2) - yz'(g-z'') \\ y''(xy'-x'y) &= - x'(\tfrac{1}{2}z''-v^2+z'^2) + xz'(g-z'') \end{aligned} \right.$$

$xy' - x'y$ ist nun nach (2) §. 1 eine Constante, die mit A bezeichnet werde. Nach (5) aber ist

$$xy' - x'y = \pm z \sqrt{\frac{v^2}{z} - \frac{z'^2}{4z^2} - \frac{z'^2}{z}} = A,$$

folglich ist

$$z(v^2 - z'^2) - \frac{z'^2}{4} = A^2,$$

$$v^2 - z'^2 = \frac{z'^2 + 4A^2}{4z}$$

$$\tfrac{1}{2} z'' - v^2 + z'^2 = \frac{2z''z - z'^2 - 4A^2}{4z}.$$

Hiermit folgt aus den Gleichungen (6)

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} Ax'' &= \frac{y'}{4z}(2zz'' - z'^2 - 4A^2) - yz'(g - z'') \\ Ay'' &= -\frac{x'}{4z}(2zz'' - z'^2 - 4A^2) + xz'(g - z'') \\ A(g - z'') &= A(g - z''). \end{aligned} \right.$$

Quadrirt und addirt man diese Gleichungen, so ergiebt sich vermöge (1)

$$(8)\quad A^2N^2 = (2zz''-z'^2-4A^2)^2\,\frac{z'^2+4A^2}{64z^3} + (g-z'')^2\,(zz'^2+A^2)$$
$$-\,(g-z'')(2zz''-z'^2-4A^2)\,\frac{z'^2}{4z}\,.$$

Nach den Gleichungen (2), (3) und (4) §. 1 ist die Constante

$$A = r_0 v_0\,,\ \text{also}$$
$$A^2 = r_0{}^2 v_0{}^2 = 2g\, z_0 z_1,$$

und nach (1) §. 7 ist

$$z'^2 = 8g\,\frac{(z-z_0)\,(z+z_1)}{4z+1}\,,\quad \text{also}$$
$$z'' = 4g\,\frac{4z^2+2z+4z_0 z_1 - z_0 + z_1}{(4z+1)^2}\,.$$

Hiernach ist nun

$$z'^2 + 4A^2 = \frac{8gz}{4z+1}\cdot\Big\{z+z_1+z_0(4z_1-1)\Big\}\,,$$
$$2zz'' - z'^2 - 4A^2 = -\,\frac{8gz^2(4z_0+1)(4z_1-1)}{(4z+1)^2}.$$

Ferner ist

$$g - z'' = -\,\frac{g(4z_0+1)(4z_1-1)}{(4z+1)^2}.$$

Substituirt man diese Werthe in (8), so erhalten die Glieder rechts den gemeinschaftlichen Factor

$$Z^2 = \frac{g^2(4z_0+1)^2(4z_1-1)^2}{(4z+1)^4},$$

und es wird

$$\frac{A^2N^2}{Z^2} = A^2(4z+1)\,,$$

womit sich schliesslich ergiebt

$$N^2 = \frac{g^2(4z_0+1)^2(4z_1-1)^2}{(4z+1)^3}.$$

Nach dieser Formel wird $N = 0$ für $z_1 = \frac{1}{4}$ und N ändert sein Vorzeichen, wenn z_1 durch $\frac{1}{4}$ hindurchgeht. Für $z_1 = \frac{1}{4}$

hat daher die Fläche in der That keinen Einfluss auf die Bewegung des schweren Punctes. Für $z_1 < \frac{1}{4}$ übt sie einen Druck nach aussen und für $z_1 > \frac{1}{4}$ einen Druck nach innen aus.

§. 9.

Bewegung eines schweren Punctes auf dem Rotationskegel

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 z^2.$$

Setzt man in den Gleichungen (6) §. 1

$$fz = \alpha^2 z^2, \quad f'z = 2\alpha^2 z, \text{ so wird}$$

$$R = 4fz + (f'z)^2 = 4\alpha^2 z^2 (1 + \alpha^2);$$

$$S = (z - z_0)\left\{ v_0^2 \frac{fz - fz_0}{z - z_0} - 2gfz \right\} = \alpha^2 (z - z_0)\left\{ v_0^2 (z + z_0) - 2gz^2 \right\}.$$

Für $\frac{v_0^2}{2g} = \varepsilon$ folgt hieraus

$$S = 2g\alpha^2 (z - z_0)\left[\tfrac{1}{2}\varepsilon\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4z_0}{\varepsilon}}\right) - z\right]$$

$$\times \left[z - \tfrac{1}{2}\varepsilon\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4z_0}{\varepsilon}}\right)\right].$$

Sei noch die positive Wurzel

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4z_0}{\varepsilon}}\right) = z_1,$$

so ist die negative Wurzel

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4z_0}{\varepsilon}}\right) = \varepsilon - z_1 = -(z_1 - \varepsilon),$$

und es ist somit

$$S = 2g\alpha^2 (z - z_0)(z_1 - z)(z + z_1 - \varepsilon).$$

Hiernach bewegt sich der schwere Punct im oberen Theile des Kegels zwischen den beiden Parallelkreisen $z = z_0$ und $z = z_1$, wo ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_1 > z_0$ angenommen werden kann, auf und ab und kann nie durch die Spitze gehen, also nie in den unteren Theil des Kegels gelangen,

ausser wenn $\varepsilon = z_1 = o$, d. h. wenn $v_o = o$. In diesem Falle erhält man aber offenbar die Bewegung auf einer geneigten Geraden oder auf einer schiefen Ebene.

Wenn $z_1 = z_o$ d. h. wenn $z_o = 2\varepsilon = \frac{v_o^2}{g}$, also wenn

$$v_o = \sqrt{gz_o},$$

bewegt sich der schwere Punct mit der constanten Geschwindigkeit $v = \sqrt{gz_o}$ im Kreise $z = z_o$.

Mit Hilfe der Werthe von R und S folgen nun aus (6) §. 1, da $r_o = \alpha z_o$, die Bewegungsgleichungen

$$(1)\begin{cases} d\varphi = \frac{z_o\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} \cdot \frac{dz}{z\sqrt{(z-z_o)(z_1-z)(z+z_1-\varepsilon)}}, \\ dt = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{2g}} \frac{z\,dz}{\sqrt{(z-z_o)(z_1-z)(z+z_1-\varepsilon)}}. \end{cases}$$

Substituirt man hierin

$$z = z_1 - (z_1-z_o)x^2,\ dz = -2(z_1-z_o)\,xdx,$$

wo x von 0 bis 1 wächst, wenn z von z_1 bis z_o abnimmt und umgekehrt, so wird

$$\frac{dz}{\sqrt{(z-z_o)(z_1-z)(z+z_1-\varepsilon)}} = \frac{1}{\sqrt{2z_1-\varepsilon}} \cdot \frac{-2dx}{\sqrt{(1-x^2)\left[1-\frac{z_1-z_o}{2z_1-\varepsilon}x^2\right]}}.$$

Hierin ist

$$0 < \frac{z_1-z_o}{2z_1-\varepsilon} = k^2 < 1,$$

weil nach Annahme $z_1 - z_o > 0$ und

$$2z_1 - \varepsilon > z_1 - z_o, \quad \text{oder}$$
$$z_1 + z_o > \varepsilon, \text{ da schon } z_1 > \varepsilon.$$

Da ferner

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_1-z_o}{z_1}x^2} \quad \text{und}$$

$$z = z_1 \left(1 - \frac{z_1 - z_0}{z_1} x^2\right) = (2z_1 - \varepsilon) \left\{ 1 - \frac{z_1 - z_0}{2z_1 - \varepsilon} x^2 - \frac{z_1 - \varepsilon}{2z_1 - \varepsilon} \right\},$$

so gehen, wenn man noch setzt

$$\frac{z_1 - z_0}{z_1} = l^2 \text{ und } \frac{z_1 - z_0}{2z_1 - \varepsilon} = k^2, \text{ wo}$$

$$o < k^2 < l^2 < 1,$$

die Differentialgleichungen über in

$$(2) \begin{cases} d\varphi = \dfrac{z_0}{z_1} \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2z_1 - \varepsilon}} \dfrac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} \cdot \dfrac{-2dx}{(1 - l^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ \sqrt{\dfrac{2g}{1+\alpha^2}}\, dt = \sqrt{2z_1 - \varepsilon} \cdot \dfrac{-2dx\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \\ \qquad - \dfrac{z_1 - \varepsilon}{\sqrt{2z_1 - \varepsilon}} \cdot \dfrac{-2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \end{cases}$$

Für den oberen Theil des Kegels ist daher φ ein elliptisches Integral dritter Gattung und t die Differenz eines elliptischen Integrals zweiter und eines solchen erster Gattung.

Betrachtet man die Gleichung (1a) als die Gleichung einer Curve auf dem Kegel $x^2 + y^2 = \alpha^2 z^2$ ohne Rücksicht darauf, dass sie die Bahn eines sich bewegenden schweren Punctes ist, so gehört zu dieser Curve nicht nur der eben angeführte Theil auf der oberen Hälfte des Kegels, sondern stets noch ein Theil auf der unteren Hälfte, der sich von $z = -(z_1 - \varepsilon)$ bis $z = -\infty$ erstreckt.

§. 10.

Für den unteren Theil des Kegels nehme man die positive Richtung der z-Achse nach unten. Alsdann hat aber die Schwere mit der positiven z-Achse einerlei Richtung, und man muss daher in den Gleichungen des vorigen §. $+g$ statt $-g$ schreiben, und hiermit wird, wenn man wieder setzt:

$$\frac{v_0^2}{2g} = \varepsilon,$$

$$S = (z - z_0) \left\{ \varepsilon (z + z_0) + z^2 \right\},$$

woraus die beiden Gleichungen folgen

$$(1) \left\{ \begin{aligned} d\varphi &= \frac{z_0 \sqrt{\varepsilon} \sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} \cdot \frac{dz}{z \sqrt{(z-z_0)[z^2 + \varepsilon(z+z_0)]}} \\ dt &= \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{2g}} \cdot \frac{z \, . \, dz}{\sqrt{(z-z_0)[z^2 + \varepsilon(z+z_0)]}} \end{aligned} \right.$$

Da für den unteren Theil des Kegels $z > 0$, so ist

$$z^2 + \varepsilon (z + z_0) > 0,$$

und die Curve erstreckt sich somit von $z = z_0$ abwärts bis ins Unendliche.

Betrachtet man auch hier die Curve ohne Rücksicht darauf, dass sie die Bahn eines sich bewegenden schweren Punctes ist, so gehört zu ihr noch ein Theil in der oberen Hälfte des Kegels, wenn die Gleichung

$$z^2 + \varepsilon (z + z_0) = 0$$

reelle Wurzeln hat. Die Wurzeln dieser Gleichung sind aber

$$z = -\tfrac{1}{2} \varepsilon \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} \varepsilon^2 - \varepsilon z_0};$$

sie werden reell oder complex, je nachdem

$$\tfrac{1}{4} \varepsilon^2 \gtreqless \varepsilon z_0, \text{ d. h.}$$

$$\varepsilon \gtreqless 4 z_0.$$

Die beiden Wurzeln werden einander gleich und zwar $-2z_0$, wenn $\varepsilon = 4z_0 = \frac{v_0^2}{2g}$.

In diesem besonderen Falle, also wenn zur Curve im unteren Theile der Kreis $z = -2z_0$ im oberen Theile gehört, lässt sich die Bahn des schweren Punctes im unteren Theile durch algebraische und Kreisfunctionen ausdrücken. Für $\varepsilon = 4z_0$ folgt nämlich aus den Gleichungen (1)

$$(2)\left\{\begin{aligned} d\varphi &= \frac{2z_0\sqrt{z_0}\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}\cdot\frac{dz}{z(z+2z_0)\sqrt{z-z_0}},\\ dt &= \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{2g}}\cdot\frac{z\,dz}{(z+2z_0)\sqrt{z-z_0}}.\end{aligned}\right.$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind

$$(3)\left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}\left\{\text{arc tg}\sqrt{\frac{z-z_0}{z_0}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\text{ arc tg}\sqrt{\frac{z-z_0}{3z_0}}\right\},\\ t &= \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{2g}}\left\{2\sqrt{z-z_0}-\frac{4\sqrt{z_0}}{\sqrt{3}}\text{ arc tg}\sqrt{\frac{z-z_0}{3z_0}}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Für $z = \infty$ ergiebt sich hieraus, dass die Curve den Meridian

$$\varphi = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\pi$$

zur Asymptote hat.

Nach (1) wächst $d\varphi$ mit ε; also hat für $\varepsilon \gtreqless 4z_0$ die Curve Asymptoten

$$\varphi \gtreqless \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\pi.$$

Im allgemeinen Falle, also wenn ε einen beliebigen Werth hat, setze man zur Abkürzung

$$\sqrt{z_0^2+2\varepsilon z_0} = a$$

und substituire

$$z = z_0 + a\frac{1+x}{1-x},\quad dz = \frac{2a\,dx}{(1-x)^2},$$

$$\begin{aligned} \text{wo } x &= -1 \text{ für } z = z_0,\\ x &= +1 \;\;\text{„}\;\; z = \infty.\end{aligned}$$

Alsdann wird

$$\frac{dz}{\sqrt{(z-z_0)[z^2+\varepsilon(z+z_0)]}} = \frac{2}{\sqrt{2a+2z_0+\varepsilon}}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left[1-\frac{2z_0+\varepsilon-2a}{2z_0+\varepsilon+2a}x^2\right]}}.$$

Hierin ist

$$\delta = \frac{2z_0 + \varepsilon - 2a}{2z_0 + \varepsilon + 2a}$$

ein echter Bruch. Derselbe ist positiv oder negativ, je nachdem $2z_0 + \varepsilon \gtreqless 2a$, d. h. je nachdem

$$\varepsilon \gtreqless 4z_0.$$

Für $\varepsilon = 4z_0$ wird $\delta = 0$ und man kommt auf die Gleichungen (2) und (3) zurück.

Für $\varepsilon > 4z_0$ also $\delta = k^2 > 0$ setze man

$$x = \sin\psi,\ dx = \cos\psi\, d\psi.$$

und es folgt die Normalform

$$\frac{dz}{\sqrt{(z - z_0)[z^2 + \varepsilon(z + z_0)]}} = \frac{2}{\sqrt{2z_0 + \varepsilon + 2a}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}},$$

wo entsprechend

$$\psi = -\tfrac{1}{2}\pi,\ z = z_0,$$
$$\psi = +\tfrac{1}{2}\pi,\ z = \infty.$$

Für $\varepsilon < 4z_0$, also für $2z_0 + \varepsilon < 2a$, d. h. für $\delta < 0$ setze man

$$x = -\cos\psi,\ dx = \sin\psi\, d\psi$$

und es folgt

$$\frac{dz}{\sqrt{(z - z_0)[z^2 + \varepsilon(z + z_0)]}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{2a - 2z_0 - \varepsilon}{4a}\sin^2\psi}}$$

wo entsprechend

$$\psi = 0,\ z = z_0$$
$$\psi = \pi,\ z = \infty.$$

Ferner ist

$$z = z_0 + a\frac{1 + x}{1 - x} = \frac{2a}{1 - x^2} - (a - z_0) + \frac{2ax}{1 - x^2}.$$

Somit führt t auf ein elliptisches Integral (scheinbar) dritter Gattung, auf ein solches erster Gattung und auf ein gemeines Integral. Das elliptische Integral (scheinbar) dritter Gattung lässt sich aber, wie §. 7 gezeigt wurde, durch ein elliptisches

Integral zweiter Gattung, ein solches erster Gattung und ein gemeines Integral ausdrücken, und es ist somit in dem jetzigen Falle t ausgedrückt durch ein elliptisches Integral zweiter Gattung, ein solches erster Gattung und ein gemeines Integral.

Endlich ist noch

$$\frac{1}{z} = \frac{1-x}{a+z_0+(a-z_0)x},$$

woraus weiter folgt

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{a-z_0} + \frac{2a}{a^2-z_0^2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{a-z_0}{a+z_0}\right)^2 x^2}$$

$$-\frac{2a}{(a+z_0)^2} \frac{x}{1-\left(\frac{a-z_0}{a+z_0}\right)^2 x^2}.$$

Hiernach wird φ ausgedrückt durch ein elliptisches Integral erster Gattung, durch ein solches dritter Gattung und durch ein gemeines Integral.

§. 11.

Bewegung eines schweren Punctes auf der Rotationsoberfläche

$$(x^2+y^2) = \tfrac{1}{9} z^2 (z+3) = fz.$$

Hier ist

$$R = 4fz + (f'z)^2 = \tfrac{1}{9} z^2 (z+4)^2 \quad \text{und}$$

$$(1) \quad S = (z-z_0) \left\{ v_0^2 \cdot \tfrac{1}{9} \frac{z^2(z+3)-z_0^2(z_0+3)}{z-z_0} - 2g \cdot \tfrac{1}{9} z^2 (z+3) \right\}$$

$$= \tfrac{1}{9} \cdot 2g(z-z_0) \left\{ \varepsilon\left[z^2+(z_0+3)z+z_0^2+3z_0\right] - z^3 - 3z^2 \right\},$$

wo wieder gesetzt ist

$$\frac{v_0^2}{2g} = \varepsilon.$$

Es müssen nun die Wurzeln der Gleichung

(2) $\psi(z) = z^3 + (3-\varepsilon)z^2 - (z_0+3)\varepsilon z - (z_0+3)\varepsilon z_0 = 0$
untersucht werden.

Vorher jedoch soll der specielle Fall $\varepsilon = 0$, d. h. $v_0 = 0$, in welchem die Bewegung des schweren Punctes in einer Ebene geschieht, behandelt werden. Die Bahn des Punctes ist alsdann die §. 4 aufgezeichnete Figur. In diesem Falle wird

$$S = \tfrac{1}{9} \cdot 2g\,(z_0 - z)(z+3)\,z^2,$$

und es folgt somit für das Zeitdifferential dt aus (6) §. 1 der Werth

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{2g}} \cdot \frac{-(z+4)\,dz}{\sqrt{(z_0-z)\,(z+3)}},$$

wo $-dz$ positiv ist, weil z von z_0 bis -3 abnimmt.

Als Integral dieser Gleichung wird gefunden

$$t = \frac{1}{2\sqrt{2g}}\left\{\sqrt{(z_0-z)(z+3)} + (5+z_0)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{z_0-z}{z+3}}\right\}.$$

Die Zeit vom höchsten Puncte $z=z_0$ bis zum tiefsten Puncte $z=-3$ ist hiernach

$$\tfrac{1}{4}\,T = \Big[\,t\,\Big]_{z=z_0}^{z=-3} = \frac{(5+z_0)\,\pi}{4\sqrt{2g}},$$

und somit die Zeit von einem höchsten Puncte durch die Ruhelage zum anderen und von diesem durch die Ruhelage zurück zum ersten oder eine ganze Schwingungsdauer

$$T = \frac{(5+z_0)\,\pi}{\sqrt{2g}}.$$

Diese Schwingungsdauer ändert sich proportional der Höhe des höchsten Punctes. Für $z_0 = 0$ wird

$$T_{(z_0=0)} = \frac{5}{\sqrt{2g}}\,\pi,$$

d. h. der schwere Punct braucht die Zeit $\frac{5}{\sqrt{2g}}\,\pi$, um den ganzen unteren Theil der Figur hin und her zu durchlaufen.

Für $z_0 = -3$ erhält man die Schwingungsdauer für unendlich kleine Schwingungen, nämlich

$$T_{(z_0=-3)} = \frac{2}{\sqrt{2g}}\pi.$$

Die Schwingungsdauer eines Kreispendels für unendlich kleine Schwingungen ist, wenn ϱ den Radius des Kreises bezeichnet,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\varrho}{g}}.$$

Der Krümmungsradius der Curve §. 4 nun ist im tiefsten Puncte $z = -3$

$$\varrho = \tfrac{1}{2},$$

daher die Schwingungsdauer für unendlich kleine Schwingungen im Krümmungskreise des tiefsten Punctes

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{2g}},$$

also genau dieselbe wie in der Curve selbst. Dieses Resultat war *a priori* zu bestimmen, da sich die unendlich kleinen Elemente einer Curve und ihre Krümmungsradien nicht von einander unterscheiden.

§. 12.

Für den allgemeinen Fall $\varepsilon \gtrless 0$ setze man in (2) des vorigen §. $\varepsilon = 3\eta$, und es folgt

$$\psi z = z^3 + 3(1-\eta)z^2 - 3(z_0+3)\eta z - 3(z_0+3)\eta z_0.$$

Da $z_0 > -3$, so hat das constante Glied $3(z_0+3)\eta z_0$ mit z_0 einerlei Vorzeichen und daher die Gleichung $\psi z = 0$ eine Wurzel, die mit z_0 einerlei Vorzeichen hat.

Es ist ferner

$$\tfrac{1}{3}\psi' z = z^2 + 2(1-\eta)z - (z_0+3)\eta$$

und dieser Ausdruck verschwindet für

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_{11} \end{matrix}\right\} = \eta - 1 \pm \sqrt{\eta^2 + (z_0 + 1)\eta + 1},$$

wo $z_1 > 0$ und $z_{11} < 0$, da $z_0 > -3$.

Für das negative z_{11} hat die Curve $y = \psi z$ ein Maximum und für das positive z_1 ein Minimum. Ist nun $z_0 > 0$, so ist $\psi(0) < 0$, und die Gleichung $\psi z = 0$ hat noch zwei reelle negative Wurzeln, wenn $\psi(z_{11}) > 0$.

Ist aber $z_0 < 0$, so ist $\psi(0) > 0$, und die Gleichung $\psi(z) = 0$ hat noch zwei reelle positive Wurzeln, wenn $\psi(z_1) < 0$.

Ist aber im ersten Falle $\psi(z_{11}) < 0$ und im zweiten $\psi(z_1) > 0$, so sind die zwei anderen Wurzeln der Gleichung $\psi z = 0$ complex.

Anstatt nun durch Auflösen der Gleichung $\psi z = 0$ die Wurzeln derselben als Functionen von ε und z_0 darzustellen, soll hier eine zweite Wurzel z_1 und zwar diejenige, die mit z_0 gleiches Vorzeichen hat, als gegeben betrachtet und nun ε als Function von z_0 nun z_1 dargestellt werden.

Der schwere Punct bewegt sich, je nachdem z_0 positiv oder negativ ist, in dem oberen unendlichen oder unteren geschlossenen Theile der Rotationsoberfläche zwischen den beiden Parallelkreisen $z = z_0$ und $z = z_1$ auf und ab und kann, da $S_{(z=0)} < 0$, nicht von dem einen Theil in den anderen gelangen. Statt nun also aus dem einen der gegebenen Parallelkreise und der Geschwindigkeit des schweren Punctes in ihm den anderen Parallelkreis in demselben Theile der Fläche zu berechnen und die beiden Parallelkreise im anderen Theile der Fläche zu finden, sollen jetzt die beiden Parallelkreise in dem einen Theile der Fläche als gegeben betrachtet und aus ihnen die Geschwindigkeit in dem einen derselben, sowie die beiden Parallelkreise im anderen Theile der Fläche berechnet werden.

Setzt man nun, um die Indices zu vermeiden,

$$z_0 = a, \quad z_1 = b,$$

so folgt aus $\psi(b) = 0$

$$\varepsilon = \frac{b^2(b+3)}{a^2+ab+b^2+3(a+b)} = \frac{b^2(b+3)}{(a+b)(a+b+3)-ab}.$$

$\varepsilon = \frac{v_0^2}{2g}$ kann nur positiv sein, da ein negatives ε eine imaginäre Geschwindigkeit im Anfange $z = z_0$ der Bewegung geben würde. Da nun stets $b > -3$ sein muss, so wird $\varepsilon \gtreqless 0$, wenn

$$(a+b)(a+b+3) \gtreqless ab\ .$$

Im oberen Theile der Fläche, wo a und b positiv sind, ist die erste Umgleichung stets erfüllt, also stets $\varepsilon > 0$, wie man auch die Parallelkreise a und b annimmt. Nicht so im unteren Theile, wo a und b negativ sind. Wird hier $-a$ und $-b$ statt $+a$ und $+b$ geschrieben, so geht die obige Umgleichung über in

$$(a+b)(a+b-3) \gtreqless ab.$$

Wird diese Umgleichung zur Gleichung, so wird die Anfangsgeschwindigkeit unendlich gross. Setzt man dann noch $a = b$, lässt also die beiden Parallelkreise zusammenfallen, so wird $a = 2$; d. h. der schwere Punct bewegt sich mit einer unendlichen Geschwindigkeit im Kreise $z = -2$, ein Resultat, das *a priori* einzusehen war, da die Fläche in dem Kreise $z = -2$ vertikal ist.

Für den oberen Theil der Fläche wird ε nur dann unendlich, wenn $b = \infty$, gleichviel ob a endlich oder unendlich ist.

Setzt man den Werth für ε in ψz ein, so folgt

$$\psi z \left\{(a+b)(a+b+3) - ab\right\} = Z$$

$$= z^2(z+3)\left\{(a+b)(a+b+3)-ab\right\} - b^2(b+3)\left\{(a+z)(a+z+3)-az\right\}.$$

Fügt man hierzu die beiden sich tilgenden Glieder

$$-b^2(b+3)\left\{(a+b)(a+b+3)-ab\right\} + b^2(b+3)\left\{(a+b)(a+b+3)-ab\right\},$$

so folgt

$$Z = (z-b)\left[\{(a+b)(a+b+3)-ab\}\{(z+b)(z+b+3)-bz\}-b^2(b+3)(z+a+b+3)\right].$$

Hiermit wird

$$\psi z = (z-b)\{(z+b)(z+b+3) - bz - \varepsilon(z+a+b+3)\}$$
$$= (z-b)\{z^2 + (b+3-\varepsilon)z - (a+3)\varepsilon + (b+3-\varepsilon)b\}.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung $\frac{\psi z}{z-b} = 0$ sind

$$\left.\begin{matrix} z' \\ z'' \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}(b+3-\varepsilon) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(b+3-\varepsilon)^2 + (a+3)\varepsilon - (b+3-\varepsilon)b}.$$

Setzt man den Werth für ε wieder ein, so ist

$$A = b+3-\varepsilon = \frac{(a+b)(a+3)(b+3)}{(a+b)(a+b+3)-ab},$$

$$B = (a+3)\varepsilon = \frac{b^2(a+3)(b+3)}{(a+b)(a+b+3)-ab},$$

$$C = (a+3)\varepsilon - b(b+3-\varepsilon) = -\frac{ab(a+3)(b+3)}{(a+b)(a+b+3)-ab}.$$

a und b haben nach Voraussetzung einerlei Vorzeichen, und der Nenner $[(a+b)(a+b+3)-ab]$ muss immer positiv sein. Daher hat A einerlei Vorzeichen mit a und b und ist C negativ. Deshalb müssen die Wurzeln z' und z'', sofern sie reell sind, das entgegengesetzte Vorzeichen von a und b haben. Die beiden Wurzeln z' und z'' sind aber reell, wenn

$$A^2 + 4C \geqq 0, \quad \text{d. h. wenn}$$

$$(a+b)^2(a+3)(b+3) \geqq 4ab\{(a+b)(a+b+3)-ab\}.$$

Dieses Kriterium lässt sich im allgemeinen Falle nicht weiter vereinfachen. In dem besonderen Falle $a = b$ aber, wo also die Bahn in dem einen Theile der Fläche ein Parallelkreis ist, geht dasselbe über in

$$(a+3)^2 \geqq 3a(a+2),$$
$$9 \geqq 2a^2,$$

d. h. wenn für ein positives a

$$a \leqq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

und für ein negatives a

$$a \geqq -\frac{3}{\sqrt{2}},$$

so sind die beiden anderen Wurzeln z′ und z″ reell. Diese beiden Wurzeln werden nach einander gleich, wenn $a = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$. Für diesen Werth ist das andere Wurzelpaar $z' = \mp \frac{3}{\sqrt{2}}$, d.h. die Bahn kann unter gewissen Umständen aus den beiden Parallelkreisen $z = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$, niemals aber aus zwei anderen Parallelkreisen bestehen.

Für den besonderen Fall a = b enthält S den Factor $(z - a)^2$, und es werden somit φ und t durch gemeine Integrale ausgedrückt.

Hat man nun im allgemeinen Falle die beiden Wurzeln z′ und z″ bestimmt, so lassen sich die Integrale φ und t

$$d\varphi = \frac{\varepsilon a\sqrt{a+3}}{2} \cdot \frac{(z+4)dz}{z\,.\,(z+3)\sqrt{(b-z)(z-a)(z-z')(z-z'')}},$$

$$dt = \frac{1}{6\sqrt{2g}} \cdot \frac{z(z+4)dz}{\sqrt{(b-z)(z-a)(z-z')(z-z'')}},$$

durch bekannte Substitutionen auf die Normalformen bringen. Diese Substitutionen sind von Weierstrass allgemein gegeben worden.

§. 13.

Bewegung eines schweren Punctes auf der umgestürzten Rotationsfläche des §. 4 d. i. auf der Fläche

$$9(x^2 + y^2) = z^2(3 - z).$$

Vertauscht man z mit — z, nimmt also die positive Rich-

tung der z-Achse nach unten, so hat die Gleichung wieder die Form

$$x^2 + y^2 = fz = \frac{1}{3} z^2(z+3).$$

Alsdann hat aber die positive z-Achse mit der Schwere einerlei Richtung, und man muss daher in den Gleichungen der vorigen §§. $+g$ statt $-g$ oder $-\varepsilon$ statt $+\varepsilon$ schreiben. Hiermit wird zunächst

$$\psi z = z^3 + (3+\varepsilon)\, z^2 + (z_0+3)\, \varepsilon z + (z_0+3)\, \varepsilon z_0 .$$

Es ist nun

$$\psi\,(-3) = -27 + (3+\varepsilon)\, 9 - (z_0+3)\, 3\varepsilon + (z_0+3)\varepsilon z_0 = \varepsilon z_0^2,$$

$$\text{also } \psi(-3) > 0.$$

Da aber $\psi(-\infty) = -\infty < 0$, so hat die Gleichung $\psi z = 0$ eine Wurzel zwischen -3 und $-\infty$.

Ferner hat $\psi(0) = (z_0 + 3) z_0$, da $z_0 + 3 > 0$, dasselbe Vorzeichen wie z_0. Ist daher $z_0 < 0$, so muss die Gleichung $\psi z = 0$ eine reelle negative Wurzel zwischen 0 und -3 und eine reelle positive Wurzel haben. Ist aber $z_0 > 0$, so kann $\psi z = 0$ keine reelle positive Wurzel haben, da alle Glieder von ψz positiv sind für $z > 0$.

Für $\varepsilon = 3\eta$ folgt

$$\frac{1}{3} \psi' z = z^2 + 2(1+\eta)\, z + (z_0+3)\eta$$

und dieser Ausdruck verschwindet für

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_{11} \end{matrix}\right\} = -(1+\eta) \mp \sqrt{1-(1+z_0)\eta+\eta^2}$$

z_1 und z_{11} sind beide negativ (da $z_0 > -3$), wenn überhaupt reell, und es ist

$$\psi z_1 = \text{Max.},\ \psi z_{11} = \text{Min.}$$

Ist demnach $z_0 > 0$, so kann die Gleichung $\psi z = 0$ nur dann zwei relle negative Wurzeln haben, die > -3, wenn $1 - (1+z_0)\,\eta + \eta^2 > 0$, d. h. wenn

$$z_0 < \frac{1 - \eta + \eta^2}{\eta}$$

Die Gleichung $\psi z = 0$ hat dann in der That zwei reelle negative Wurzeln zwischen 0 und -3, wenn $\psi\, z_{11} < 0$, und diese Wurzeln sind einander gleich, wenn $\psi z_{11} = 0$.

Die negative Wurzel von $\psi z = 0$, welche < -3, heisse $-b$, und statt z_0 werde a geschrieben; alsdann wird, da $\psi(-b) = 0$

$$\varepsilon = \frac{b^2(b-3)}{(a-b)(a-b+3)+ab}.$$

Da $b - 3 > 0$, so muss a und b stets so bestimmt werden, dass $(a-b)(a-b+3)+ab>0$, weil im entgegengesetzten Falle ε negativ, also v_0 imaginär würde.

Die Wurzel $a = z_0$, welche die Anfangshöhe bezeichnet, kann unbeschadet der Allgemeinheit positiv genommen werden. Denn wäre sie wirklich negativ, so suche man die positive Wurzel der Gleichung, welche z_1 heisse, berechne v_1 und vertausche die Indices 0 und 1 mit einander.

Hiermit wird nun

$$S = (z-a)\psi z = (b+z)(z-a)(z+c)(z+d),$$

wo $a > 0$, $b > 0$, c und d entweder beide reell und positiv oder conjugirt complex sind.

S wird positiv, wenn

1. $z < -b$,
2. $-c < z < -d$,
3. $z > a$.

$z < -b$ liegt nicht auf der Fläche, da sich dieselbe nur bis $z = -3$ aufwärts erstreckt und $b > 3$ ist. Es besteht hiernach die Bahn des Punctes aus einem Zuge auf dem unteren unendlichen Theile der Fläche von $z = a$ abwärts bis ins Unendliche und, wenn c und d reell sind, aus einem Zuge in dem oberen geschlossenen Theile der Fläche zwischen den Parallelkreisen $z = -c$ und $z = -d$.

Ist c = d, so ist der Zug im oberen Theile ein Parallelkreis und der Zug im unteren Theile lässt sich durch gemeine Integrale ausdrücken, da alsdann S den Factor $(z + c)^2$ enthält.

§. 14.

Nachdem die elliptischen Integrale auf die Normalformen gebracht sind, lassen sie sich leicht durch die Jacobi'schen Thetafunctionen berechnen.

Es sollen hier die Formeln zur Berechnung kurz zusammengestellt werden.

Die Thetafunctionen sind definirt durch die Gleichungen

$$\vartheta(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^s q^{s^2} e^{2sxi} = 1 - 2q^{1^2}\cos 2x + 2q^{2^2}\cos 4x - 2q^{3^2}\cos 6x + \ldots$$

$$\vartheta_1(x) = -i \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^s q^{(s+\frac{1}{2})^2} e^{(2s+1)xi}$$

$$= 2q^{(\frac{1}{2})^2}\sin x - 2q^{(\frac{3}{2})^2}\sin 3x + 2q^{(\frac{5}{2})^2}\sin 5x - + \ldots$$

$$\vartheta_2 x = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{(s+\frac{1}{2})^2} e^{(2s+1)xi} = 2q^{(\frac{1}{2})^2}\cos x + 2q^{(\frac{3}{2})^2}\cos 3x + 2q^{(\frac{5}{2})^2}\cos 5x + \ldots$$

$$\vartheta_3 x = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{s^2} e^{2sxi} = 1 + 2q^{1^2}\cos 2x + 2q^{2^2}\cos 4x + 2q^{3^2}\cos 6x + \ldots,$$

wobei x reell oder complex sein kann und

$$0 < q < 1$$

Führt man noch die Grösse k' ein, so dass

$$k^2 + k'^2 = 1 \text{ und } 0 < k' < 1,$$

und setzt zur Abkürzung

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \Delta\varphi > 0$$

so ist das elliptische Integral erster Gattung

$$(1) \qquad u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = x \, . \, \vartheta_3^{\,2}(0),$$

wo q und x durch folgende Gleichung aus k und φ näherungsweise berechnet werden können.

$$(2)\quad \Delta\varphi = \sqrt{k'}\,\frac{\vartheta_3 x}{\vartheta x} = \sqrt{k'}\,\frac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+\ldots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-+\ldots}.$$

Es ist nämlich für $\varphi = 0$ auch $u = 0$ und da $u = x\,.\,\vartheta_3{}^2(0)$ und $\vartheta_3{}^2(0) > 0$, so muss für $\varphi = 0$ auch $x = 0$ sein. Für $\varphi = x = 0$ folgt nun, da $\Delta 0 = 1$ aus (2)

$$(3)\qquad 1 = \sqrt{k'}\,\frac{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots}{1-2q+2q^4-2q^9+-\ldots},$$

aus welcher Gleichung sich q berechnen lässt, wenn k gegeben ist.

Da $\Delta\, m\pi = 1$ und $\Delta\,\frac{m+1}{2}\pi = \sqrt{1-k^2} = k'$

$$\text{und}\quad \vartheta_3(x+m\pi) = \vartheta_3 x,$$
$$\vartheta\,(x+m\pi) = \vartheta x,$$
$$\vartheta_3\left(x+\frac{m+1}{2}\pi\right) = \vartheta x,$$
$$\vartheta\left(x+\frac{m+1}{2}\pi\right) = \vartheta_3 x,$$

so folgt aus (2) stets die Gleichung (3) wenn

$$\varphi = x = \frac{\pi}{2} = \pi = \frac{3\pi}{2} = 2\pi = \ldots.$$

Da nun für $\varphi = 0$ auch $x = 0$, so müssen φ und x die Werthe $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi\ldots$ gleichzeitig annehmen.

Nachdem aus (3) q berechnet ist, findet man aus (2) x und somit das Integral

$$\int_0^{\Phi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = x\,.\,\vartheta_3{}^2(0).$$

Durch dieselben Gleichungen (2) und (3) findet man das elliptische Integral 2. Gattung

$$\int_0^{\Phi}\Delta\varphi\,d\varphi = \frac{1}{\vartheta_3{}^2 0}\left(l'\,\vartheta x - x l''\,\vartheta_2 0\right).$$

Das elliptische Integral dritter Gattung ist

$$\int_0^{\Phi}\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = \int_0^{\Phi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int_0^{\Phi}\frac{n\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi}.$$

Setzt man $n = - k^2 \sin^2 \alpha$, wo α nach der Grösse von n reell oder complex ist, so wird

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_0^{\Phi} \frac{k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi\, d\varphi}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}.$$

Sei ferner

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\lambda}{\Delta\lambda} = \vartheta_3^2(0)\,.\,a,$$

wo a reell oder complex ist, so ist

$$\int_0^{\Phi} \frac{k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = \frac{tg\alpha}{\Delta\alpha}\left\{ x\, l'\vartheta a + \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} \right\}$$

und daher

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\,\Delta\varphi} = x\,.\,\vartheta_3^2 0 + \frac{tg\alpha}{\Delta\alpha}\left\{ x\, l'\vartheta a + \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{\vartheta(a-x)}{\vartheta(a+x)} \right\}.$$

Verbesserungen.

S. 10 Z. 1 l. $z - z_0$.
„ 13 „ 1 l. x, y, z.
„ 16 „ 8 v. u. l. jeden.
„ 19 „ 2 v. u. l. $(z + \alpha)^2$ statt $(z + a)^2$.
„ 23 „ 5 „ l. Summe der dritten.
„ 26 „ 11 l. $z_0 < z_1$.
„ 27 „ 12 ist „Richtung der“ zu streichen.
„ 30 „ 8 v. u. l. φ_∞.